Công Thức Tính Số Thập Phân Của Hằng Số Pi

(π = 3,14159265358979323846264338327950288419716…)

Hằng số Pi, được ký hiệu trong toán học là π [1*], nó được xác định bởi chu vi đường tròn chia cho đường kính của đường tròn đó. Thoạt nhìn con số Pi tính được từ đường tròn, ta tưởng nó cũng giống như những con số bình thường khác nhưng khi khảo sát sâu vào số thập phân thì nó là con số kỳ bí đấy! Ngày nay người ta biết hằng số Pi là số vô tỷ và còn là một con số siêu việt vì nó không là nghiệm của bất kỳ một phương trình toán học đại số nào hoặc nó cũng không thể lấy từ phân số của các số nguyên hay tự nhiên tác tạo thành. Những con số thập phân của Pi đã được tính chính xác tới hàng tỷ con số. Nhưng điều kỳ diệu là sự phân bố của những con số thập phân đó không theo bất kỳ một dạng chuỗi hay dãy số đặc biệt nào đã được biết trong toán học, và cho đến ngày nay người ta vẫn chưa thấy có khoảng chuỗi các con số lặp lại của những số thập phân trong hàng tỷ con số đã tính được đó. Liệu những con số thập phân tiếp theo của những dãy số đã biết đến một lúc nào đó có rơi vào một chu kỳ tuần hoàn không? Vẫn còn bí ẩn! Mục đích để tính tới hàng tỷ con số thập phân của Pi vẫn chưa được thẩm thấu rõ ràng, và ứng dụng của nó vào thực tiễn vẫn chưa có xu hướng. Nhưng dù sao các nhà toán học vẫn đi tìm kiếm để hiểu cấu trúc bên trong của những số thập phân của Pi. Sự tìm hiểu về Pi dẫn đến có những sự khám phá lý thú khác trong toán học. Đó là phát triển các mô hình toán học mà ngày nay gọi là tân toán học dùng trong nhiều ứng dụng khoa học khác và đồng thời cũng áp dụng để tính hằng số Pi. Hằng số Pi hầu như có mặt khắp nơi trong cấu trúc thiên nhiên như các tinh tú trong vũ trụ, trong cầu vồng, đồng tử trong mắt, những chuỗi soắn kép trong DNA, các biểu thức chuỗi số trong toán học và vân vân.

Ngược dòng thời gian, hằng số Pi được các nhà toán học người *Babylonian* biết đến vào thế kỷ 19 trước Công nguyên và họ dùng giá trị Pi bằng 3,125. Trong kinh thánh *Thiên Chúa* giáo có đoạn ghi giá trị của Pi gần bằng 3. Nhà bác học đại tài cổ đại *Archimedes*, người Hy lạp, đã dùng đa giác đều nội tiếp đường tròn trong khoa hình học đã xác định được giá trị chính xác của hằng số Pi rơi vào trong khoảng 223/71 và 22/7, hay trung bình cộng của hai con số này gần bằng 3,1419 - chính xác tới 3 con số thập phân. Vào năm 263 trước Công nguyên, nhà toán học *Liu Hui* Trung quốc đã tính ra giá trị của Pi là 3,141014 – chính xác tới 3 con số thập phân. Đầu thế kỷ thứ năm sau Công nguyên, nhà toán học *Aryabhata* người Ấn đã tính con số Pi bằng 3,1416, và con số này khá chính xác hơn so với *Liu Hui* tìm trước đó hơn bảy thế kỷ đã trôi qua! Rồi cũng trong thế kỷ thứ năm, một nhà toán học Zu Chongzhi Trung quốc đã đưa ra giá trị của Pi nằm trong khoảng 3,1415926 và 3,1415927, một sự chính xác bất ngờ tới 7 con số! Sau đó mãi đến thế kỷ 14, nhà toán học khác tên *Madhava* người Ấn độ đã đưa ra tới 11 con số thập phân chính xác, ấy là 3,14159265359. Sự tìm hiểu của con người về Pi không dừng ở đó, vào năm 1646 nhà toán học *Leibniz* người Đức đã đưa ra công thức tính Pi rất kỳ dị, đó là:

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots, (-1 \le x \le 1)$$ (công thức *Leibniz*)

Cũng có một số tài liệu nói công thức trên là do *Jame Gregory* khám phá ra trước. Nếu ta cho giá trị x = 1 thế vào biểu thức trên, ta thu được biểu thức chuỗi số:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots \Leftrightarrow \pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots\right)$$

Điều hết sức ngạc nhiên là người ta thấy Pi trong trường hợp này có liên quan tới các con số nguyên như 1, 3, 5, 7,…, mà trước đó các nhà toán học cho rằng Pi chỉ tồn tại trong hình học. Mặc dù biểu thức trên với giá trị của nó hội tụ về Pi rất chậm nhưng nó đã mở ra kỷ nguyên một phương pháp mới tính Pi hết sức thú vị. Phương pháp này được dùng cho đến ngày nay và nó phải dùng kèm với các công thức liên quan tới hàm ngược của tan khác, được ký hiệu $\tan^{-1} x$, còn gọi là công thức Machin, sẽ nói tới phần kế tiếp. Với biểu thức chuỗi thu được ở trên, ta cộng trừ khoảng chừng một ngàn con số đầu tiên ta chỉ tính chính xác giá trị Pi tới vài con số thập phân thật khiêm tốn.

Vào đầu thế kỷ 17, *John Machin* người Anh, đã tìm ra được công thức:

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}.$$

Sau này người ta gọi là dạng *Machin*. Kết hợp công thức *Machin* này với công thức mà *Leibniz* đã tìm ra trước đó thì giá trị Pi đã được Sharp tính chính xác tới 71 con số thập phân. Lý do là cơ số 5 và 239 tương đối lớn và khi chúng được lũy thừa k với giá trị k tăng dần đã làm chuỗi số hội tụ về Pi nhanh hơn. Sau đó công thức này cũng được *Machin* dùng để tính chính xác tới 100 con số thập phân của Pi. Đến năm 1873, *Shanks* đã cho ra 709 con số thập phân tính bằng tay, nhưng sau này người ta biết chỉ có 527 con số thập phân đầu tiên trong số đó là chính xác. Cũng dựa vào phương pháp này, *Shanks* đã biết rằng Pi là số vô tỷ. Tiếp đó không bao lâu, nhà toán học *Lindeman* người Đức đã chứng minh rằng Pi là con số siêu việt vì nó không phải là nghiệm của bất kỳ biểu thức hay phương trình đại số toán học có thể giải ra nó. *Linderman* đã chỉ ra rằng không thể nào khai căn bâc hai của một đường tròn bằng phương pháp đại số! Sự tiếp diễn tính những con số thập phân của Pi đã thực hiện bởi nhiều các nhà toán học khác. Đến năm 1949, lần đầu tiên người ta dùng máy tính và tính được giá trị Pi chính xác tới 2000 số. Từ đó mỗi năm theo sự phát triển về tốc độ và sức mạnh của máy điện toán, người ta lại đạt một kỷ lục tính số thập phân của Pi lên tới trăm nghìn con số rồi đến triệu và tỷ con số. Trung tuần tháng 12 năm 2002, nhóm tin học do giáo sư *Kanada* người *Nhật* làm trưởng nhóm, đã dùng nhiều máy tính hiện đại nối xen kẽ đã tính được tới 1,24 tỷ tỷ con số thập phân của Pi một cách chính xác. Công thức *Machin* mà giáo sư *Kanada* và nhóm tin học đã dùng để tính là:

$$\pi = 48\tan^{-1}\frac{1}{49} + 128\tan^{-1}\frac{1}{57} - 20\tan^{-1}\frac{1}{239} + 48\tan^{-1}\frac{1}{110443}$$

Ta để ý các cơ số của hàm ngược $\tan^{-1} x$ ở biểu thức trên là 48, 128, 239 và 110445 rất lớn. Khi áp dụng công thức *Leibniz* thì mức hội tụ của chuỗi số về Pi càng nhanh và chính xác.

Có rất nhiều công thức ở dạng *Machin* được khám phá. Tất cả các phương pháp tính Pi từ ba thế kỷ trước đây đến năm 2002 đều sử dụng các dạng công thức *Machin* và kết hợp với công thức do *Leibniz* tìm ra. Vào năm 1997, một công thức khác có tên gọi là *BBP* dùng để tính số thập phân của Pi đã được ba nhà toán học Canada tên *David Bailey*, *Peter Borwein* và *Simon Plouffe* sử dụng một dạng thuật toán *algorithm* riêng gọi là *PSLQ* và kết hợp với máy tính đã khám phá ra:

$$\pi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right) \quad (BBP)$$

Chữ *BBP* là phần viết tắt tên họ của ba người vừa nói trên. Thuật toán *PSLQ* được dùng để tìm sự liên hệ của các số nguyên nằm giữa các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ trong đó nó phải thỏa mãn phương trình $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = 0$ với các số nguyên a_i không cùng một lúc bằng 0. Điểm cốt lõi của công thức *BBP* ở trên là khi tính số thập phân của Pi ở dạng nhị phân hay ở hex (cơ sở 16) thì không cần phải cộng hay trừ các số đã tính được trước đó cho mỗi bước xê dịch của k đang tiến từ 1 tới một số lớn hay vô cực. Hay nói nôm na là ta không cần nhớ các số đã được tính trước đó cho mỗi giá trị của k, như vậy đỡ phải lưu chúng trong bộ nhớ trong suốt tiến trình tính toán. Điều đó có nghĩa rằng ta không cần phải trang bị máy điện toán cực mạnh và không cần kết hợp với nhiều máy tính khác như đã làm trước đó. Sở dĩ công thức BBP có được tính chất vừa nêu trên là vì cơ số 16 lũy thừa k đã cho các số hạng trong biểu thức cùng đồng bộ nhỏ và hội tụ rất nhanh khi giá trị k tiến từ 1 lên các số lớn. Đây là phương sách hay nhất để tính giá trị số thập phân của Pi (ở dạng cơ sở 16 hay nhị phân) có từ trước đến giờ. Nhưng thế giới mà con người đọc và hiểu về Pi hay những con số khác là những con số thuộc số thực hay dạng thập phân (decimal) có cơ số 10 chứ không phải ở dạng nhị nguyên, số mà chỉ có máy tính mới hiểu. Thí dụ con số Pi ở dạng cơ sở 16 có giá trị là 3.243F6A8885A308D313… (giá trị tương đương theo cơ sở 10: A là 10, B là 11, C là 12, D là 13, E là 14 và F là 15). Như vậy qua công thức *BBP*, số Pi ở dạng hex đã được tính tới hàng tỷ con số nhưng làm sao để "chuyển kiểu" những chuỗi số từ dạng cơ sở 16 để thành dạng hệ thập phân (cơ sở 10) khi mà chưa biết hết toàn bộ chuỗi của Pi đang ở dạng hex trước đó? Người ta dễ dàng chuyển những số từ dạng cơ sở 16 sang dạng nhị phân nhưng khi chuyển hàng tỷ con số từ dạng cơ sở 16 hay nhị phân sang dạng cơ sở 10 thì vẫn còn nan giải. Cho đến nay những công thức *BBP* cho Pi ở dạng cơ sở 10 đang được lùng kiếm và vẫn chưa biết là dạng này có tồn tại hay không.

Ngay sau khi công thức *BBP* được khám phá và được công bố trên Nguyệt san toán học, các nhà toán học trên thế giới cũng tìm ra thêm các dạng công thức khác tương tự như công thức *BBP* để tính các hằng số toán học khác như log2, log3, Pi bình phương, căn bậc hai của ba nhân Pi và vân vân.

Công thức dưới đây, cũng thuộc dạng *BBP*, dùng để tính Pi đã được tìm thấy tại website http://www.seriesmathstudy.com/ đăng ngày 29 tháng 5 năm 2006:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4096^k}\left[\frac{1/8}{8k+3}+\frac{1/2}{8k+2}+\frac{1}{8k+1}+\frac{1/128}{12k+9}+\frac{1/8}{12k+5}+\frac{2}{12k+1}-\frac{1/512}{8k+7}-\frac{1/128}{8k+6}-\frac{1/64}{8k+5}-\frac{1/512}{12k+11}-\frac{1/32}{12k+7}-\frac{1/2}{12k+3}\right]=\pi$$

Và

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4096^k}\left(\frac{1/8}{8k+3}+\frac{1/6}{8k+2}+\frac{1}{8k+1}+\frac{1/8}{12k+5}+\frac{2}{12k+1}-\frac{1/512}{8k+7}-\frac{1/384}{8k+6}-\frac{1/64}{8k+5}-\frac{1/512}{12k+11}-\frac{1/32}{12k+7}\right)=\pi.$$

Hai công thức ở trên có cơ số khá lớn, ấy là 4096 lũy thừa k, chắc chắn sẽ làm cho việc tìm số thập phân của Pi nhanh hơn nhiều khi giá trị k được xê dịch đi một đơn vị về phía số lớn hay tiến đến một số lớn nhất nào đó về phía vô cực mà máy tính có cơ chế thực hiện được.

Những năm gần đây người ta còn tìm thấy một số công thức chuỗi liên quan tới Pi, được nhà toán học *Ramanujan* [2*] khám phá ra năm 1910, như sau:

$$\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4\,396^{4k}}=\frac{1}{\pi}$$

Công thức trên, có mẫu số chứa k giai thừa lũy thừa bốn lớn hơn so với giai thừa ở tử số và còn có cơ số 396 lũy thừa 4k, đã làm cho chuỗi số này hội tụ nhanh khủng khiếp. *Bill Gosper* đã dùng công thức này tính được 17 triệu số thập phân của Pi vào năm 1985. Cứ mỗi bước xê dịch của k từ số nhỏ tới số lớn, Gosper tính được tám con số thập phân chính xác của Pi. Cũng vào thời điểm này, *David* và *Gregory Chudnovsky* tìm ra công thức chuỗi có dạng của *Ramanujan* được miêu tả ở dưới đây:

$$12\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(6k)!(13591409+545140134k)}{(3k)!(k!)^3\,640320^{3k+3/2}}=\frac{1}{\pi}$$

Trong công thức chuỗi này, mỗi bước xê dịch của k cho chính xác tới mười bốn con số thập phân của Pi. *David* và *Gregory* sử dụng công thức trên cùng với lối kỹ thuật áp dụng cho số cực lớn đã tính được bốn tỷ số thập phân của Pi - *lập kỷ lục năm 1996*.

Mặc dù số thập phân của Pi đã được biết hàng tỷ con số, trong thực tế khi áp dụng người ta chỉ dùng khoảng năm chục con số cũng đủ khá chính xác cho việc tính toán những số lớn có liên quan tới Pi. Thí dụ như khi đo lường chu vi trương nở của vũ trụ có bán kính 10 lũy thừa 25, người ta phải dùng gần bốn mươi con số thập phân của Pi thì mới đo được sự chính xác với sự sai số rất nhỏ. Khi nhìn vào dãy thập phân của Pi, ta tưởng chừng nó như là những con số hỗn độn. Nhưng nó được tính toán từ biểu thức đại số toán học, hiển nhiên những con số lẻ đó không phải là số ngẫu nhiên, mà là những con số nằm trong chuỗi số *có cấu trúc bí hiểm!* Một số nhà toán học lại "*máy móc*" muốn tìm kiếm một dãy số có dạng số thứ tự "*0123456789*" liệu nó có tồn tại trong hàng tỷ con số thập phân đó không? Thật vậy, năm 1997 lần đầu tiên họ tìm thấy duy nhất một dãy số liên tiếp từ 0 tới 9 này nằm sau con số lẻ thứ *17.387.594.880*.

Những con số thập phân của Pi có nằm trong một quy luật trật tự nào không hay nó chỉ là một mớ chuỗi số hỗn độn? Câu hỏi được đưa ra dường như là sự trêu chọc có chủ ý, hay là sự thách đố để cổ vũ con người tiếp tục lao vào tìm kiếm điều bí ẩn những số lẻ của hằng số Pi mà nó ẩn mình trong một hay nhiều cấu trúc thiên nhiên nào đó và *đang chờ được khám phá*...

Ngày 19 tháng 11 năm 2006
T.V.

Thượng Đế tạo ra các con số, phần còn lại do con người (Leopold Kronecker, 1823-1891)

Đọc thêm bài công thức tính số thập phân của ln2

[1*] Ký hiệu này được nhà toán *Leonahard Euler*, người Thụy Sĩ, dùng đầu tiên vào năm 1737.
[2*] *Srinivas Ramanujan* (22/12/1887 - 26/04/1920), người Ấn Độ, một kỳ tài trong toán học khó thấy từ cổ chí kim, trong thời gian rất ngắn đã tự *khám phá và hoàn tất* gần 3900 định lý và công thức liên quan tới các lãnh vực lý thuyết số, chuỗi số hội tụ, vi phân bất định, và một số hàm đặc biệt trong toán học. Hầu hết trong các công thức ông khám phá, người ta không thấy ông để lại "*dấu tích*" chứng minh trong các cuốn sổ tay nhỏ của ông để lại sau khi mất ở tuổi 32. Ngày nay, một số giáo sư trong các trường đại học đang vất vả "cập nhật" rất ít phần chứng minh về các công thức cũng như định lý của ông vì hầu hết chúng đều thuộc loại rất khó chứng minh! Ví dụ một số công thức chuỗi hội tụ mô tả ở trên đã được máy điện toán cực siêu trợ giúp và dựa vào một số thuật toán mới "chứng minh" ra được kết quả. Đây cũng là ngành toán học thực nghiệm vừa mới hình thành khoảng chừng hơn hai thập niên - một hứa hẹn giúp các nhà toán học tìm kiếm các công thức trong tương lai. Một số người chuyên nghiên cứu về những công thức và định lý của *Ramanujan* tiên đoán thế giới phải đợi đến vài thập niên nữa hay cả thế kỷ nữa để "*tiếp thu*" phần *tinh túy* đó.

Tài Liệu Tham Khảo

1. Essays and Surveys, Bruce C. Berndt and Robert Rankin, AMS-LMS History of Mathematics, vol. 22, 2001.
2. History and Computation, Jonathan M. Borwein, FRSC, Prepared for Australian Colloquia, 2003.

Chú ý: Gần đây chúng tôi bắt gặp một số website khác đăng bài viết (ví dụ như tập tin timdientich.pdf) từ trang web www.seriesmathstudy.com, họ đã lấy tên tác giả "T.V" ra, sửa mầu cho đề mục và còn để tên của website đó vào trong bài viết. Chúng tôi vẫn tôn trọng và không nêu đích danh website đã vi phạm trắng trợn về "All Right Reserved". Chúng tôi thiết nghĩ rằng nội dung của bài viết sẽ cho bạn đọc biết nguồn gốc website của nó một khi bạn đã đọc qua.

Mọi ý kiến xây dựng và bài vở xin liên lạc dothi@seriesmathstudy.com.